

Versicherungstechnischer Umgang mit Risiko

1. Dienstleistung Versicherung:

Schadensdeckung von für die einzelne Person nicht tragbaren Schäden durch den *finanziellen Ausgleich in der Zeit und im Kollektiv*. Dies ist möglich über das *Gesetz der grossen Zahlen*, das heisst die Schwankungen der Zufallsvariable „Schaden“ ($\text{var}[S]$) werden für die Versicherung kleiner bei zunehmender Zahl der eingegangenen Risiko-Verträgen (Versicherungspolicen), sofern die einzelnen versicherten Ereignisse *unabhängig* sind, so dass das Portefeuille diversifiziert ist.

➔ Je grösser die Varianz eines einzelnen Ereignisses (oder: je unberechenbarer die Wahrscheinlichkeit) desto höher wird die zu zahlende Prämie der Versicherung).

2. Einfluss auf Umwelt

- Motivation zur Umgehung von Risikotechnologien deren Risikopotential nur schwer berechenbar ist.
 - ➔ Versicherungen setzen bei der Versicherung von Kernkraftwerken ein Schadensmaximum von 10 Mio. SFr., um das Risiko zumindest auf der Seite des Schadens nicht ins grenzenlose wachsen zu lassen.
- Motivierung zu Schutzmassnahmen zur Schadensreduktion über die Prämienpolitik gegenüber dem Kunden, d.h. der Kunde erhält als Gegenleistung für eine Sicherheitserhöhung durch Schutzmassnahmen eine Prämienreduktion offeriert.
 - ➔ Die Wirkung ist jedoch nicht zu überschätzen, da Schutzmassnahmen über Prämienreduktion nicht vollständig deckbar sind.
Negatives Beispiel: Sandoz wechselte zur Versicherung von Schweizerhalle von der Zürich-Versicherung zur Gerling-Versicherung (für eine höhere Prämie), um die von der Zürich geforderte Schutzmassnahmen (ein Rückhaltebecken für Löschwasser) zu umgehen. Später fehlte jenes Rückhaltebecken und Gerling zahlte 10 Mio. SFr. Schadenersatz für die Folgen der Chemieunfalls.
 - ➔ Starke Konkurrenz und freier Markt arbeitet gegen die Einflussstärke der Versicherung:
„Positives“ Beispiel: Nach Tschernobyl wollte keine Versicherung aufgrund der Produkthaftung die von der EU an die Ukraine offerierten Reparaturmassnahmen anderer Reaktoren übernehmen.
- Versicherung kann auch eine Motivation zu grösserer Risikofreudigkeit sein.
 - ➔ Der mögliche Schaden muss im Falle einer Versicherung nicht mehr vom Verursacher getragen werden, die gezahlte Prämie berechtigt den Versicherten eigentlich zur Schadensverursachung.

3. Berechenbarkeit des Versicherungsrisikos

$\text{Risiko} = \text{Schaden} * \text{Wahrscheinlichkeit}$

Das Gesetz der grossen Zahlen ermöglicht bei wachsender Zahl der einzelnen Risiken die zunehmende *Berechenbarkeit des Gesamtrisikos* durch die „Stabilisierung“ der Gesamtwahrscheinlichkeit des Schadens (unabhängige Ereignisse!).

➔ Der Schaden ist kein Einzelereignis mehr, sondern wird als jährliche Summe von Ereignissen kalkulierbar.

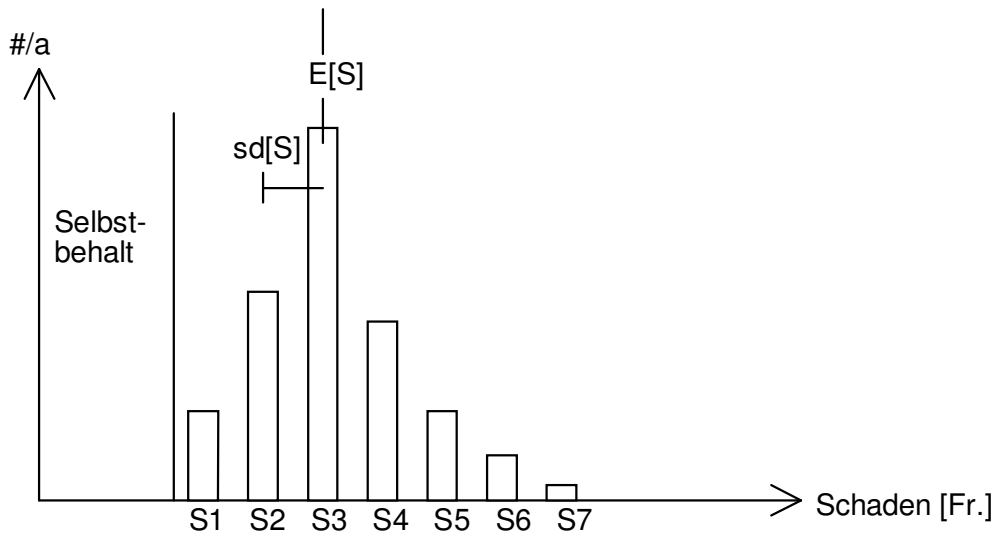


Fig. 1: Diskreter Fall einer möglichen Schadensverteilung.

Erwartungswert des Einzelschadens $S_i = 1$ mit der Wahrscheinlichkeit p_i :

$$E[S_i] = p_i * S_i + (1 - p_i) * 0 = p_i * S_i$$

Erwartungswert des Gesamtschadens S für die Versicherung:

$$E[S] = \sum_i p_i * S_i$$

Varianz des Gesamtschadens:

$$\text{var}[S] = E[(S - E[S])^2] = \sum_i p_i * (S_i - E[S])^2$$

4. Versicherungshandel nach dem Nullnutzenprinzip

In der Ökonomie geht man in der Regel von *konvexen Nutzensfunktionen* aus.

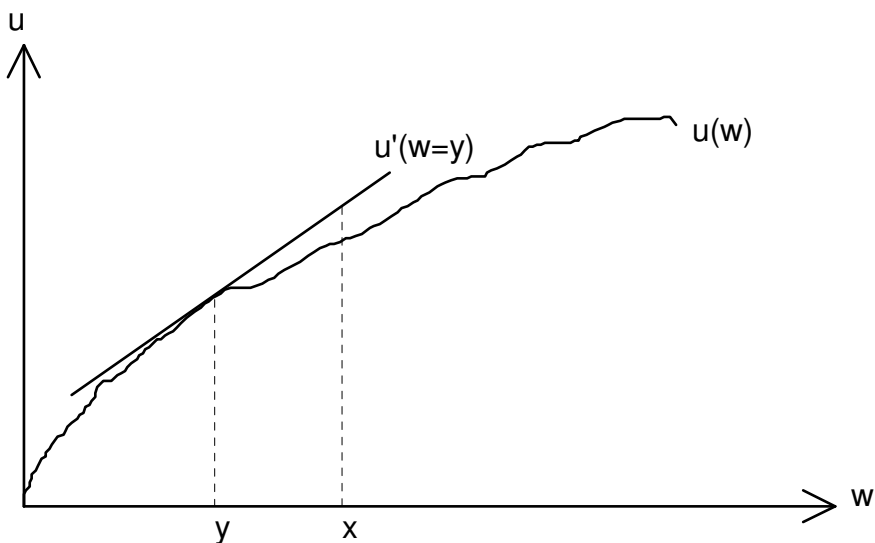


Fig. 2: Konvexe Nutzensfunktion mit $u(w) > 0$, $u'(w) > 0$ und $u''(w) < 0$

Im Fall der konvexen Nutzensfunktion gilt die *Jensen'sche Gleichung*. Dabei kann X eine Zufallsvariable sein, wie dies in den nachfolgenden Beispielen der Schaden eines zufälligen Ereignisses ist, und u ist der Nutzen, der aus dem Eintreffen dieses Ereignisses erwächst:

$$E[u(X)] \leq u(E[X])$$

Aus der Sicht der Versicherung

Der *gerechte Preis* ist gegeben durch die Logik des *Nullnutzensprinzips*, das heisst der Nutzen an einem Geschäft ist gleich gross wie der Nutzen, wenn das Geschäft nicht abgeschlossen worden wäre. Für die Versicherung heisst dies nun, dass der Nutzen den sie aus ihren Eigenkapital w allein gewinnen würde gleich gross sein soll, wie der Gewinn, den sie aus einer Police zieht. Durch Umformung gemäss der Jensen'schen Gleichung erhalten wir:

$$\begin{aligned} u(w) &= E[u(w + p - S)] \\ &\leq u(w + p - E[S]) \end{aligned}$$

Daraus folgt die Mindestprämie p , die die Versicherung für eine Police verlangen müsste:

$$\begin{aligned} w &\leq w + p - E[S] \\ \rightarrow p &\geq E[S] \end{aligned}$$

Aus der Sicht des Versicherten

Auch für den Versicherten soll das Nullnutzenprinzip gelten, sonst würde er keine Versicherungspolice abschliessen. Dabei ist b sein Gesamtbudget entsprechend dem Kapital einer Versicherung.

$$\begin{aligned} u(b - p) &= E[u(b - S)] \\ &\leq u(b - E[S]) \end{aligned}$$

Daraus folgt die Maximalprämie p , die er zu bezahlen bereit ist:

$$\begin{aligned} b - p &\leq b - E[S] \\ \rightarrow p &\geq E[S] \end{aligned}$$

Daraus ist zu ersehen, dass auch für den Versicherten die Prämie über dem Erwartungswert des versicherten Schadens liegen darf.

5. Prämienberechnung

Wie berechnet nun aber eine ideale Versicherung ihre Prämien? Das einfachste Prinzip, nicht aber ein sehr sicheres, ergibt sich aus den vorangehenden Überlegungen:

- **Nettorisikoprinzip:** $p(S) = E[S]$
 - ➔ Ruintheorie besagt, dass mit Wahrscheinlichkeit $\Psi(w)$ ein Schaden eintritt, der das Kapital der Versicherung übersteigt, was zum Ruin führt.
 - ➔ Zur Versicherungsprämie wird also noch ein Sicherheits- bzw. Schwankungszuschlag addiert, der sich nach der Ruinwahrscheinlichkeit richtet, die eine Versicherung bereit ist einzugehen.

Will also eine Versicherung den Zeitpunkt des Ruins möglichst weit hinausschieben, setzt sie die *technische Prämie* höher als den Erwartungswert des Schadens an, das heisst sie rechnet neu *Schadenslast plus „Loading“*. Es gibt nun verschiedene Methoden, wie dieser Sicherheitszuschlag gewählt werden kann:

- Erwartungsprinzip: $p(S) = (1 + \delta) E[S]$
 ➔ Einfach berechenbar, da nur der Erwartungswert des Schadens bekannt sein muss.
- Varianzprinzip: $p(S) = E[S] + \delta \text{var}[S]$
 ➔ $E[S]$ und $\text{var}[S]$ haben verschiedene Einheiten.
 ➔ $\text{var}[S_1 + S_2] = \text{var}[S_1] + \text{var}[S_2]$ für *unabhängige* und *unkorrelierte* Ereignisse
- Standardabweichungsprinzip: $p(S) = E[S] + \delta \text{sd}[S]$
 ➔ $\text{sd}[S_1 + S_2] \neq \text{sd}[S_1] + \text{sd}[S_2]$

5.1. Eigenschaft des Sicherheitszuschlags

Nun stellt sich die Frage, wie gross δ im Idealfall sein sollte. Wir wollen das im Falle des Variationsprinzip genauer betrachten. Ausgangspunkt der Überlegungen bildet wieder das *Nullnutzenprinzip*.

$$u(w) = E[u(w + p - S)]$$

Diese Gleichung kann nun über Taylorreihen, Erwartungswertbildung und die positive Lösung der resultierenden Quadratischen Gleichung in folgende Gleichung umgeformt werden, woraus dann δ resultiert:

$$p[S] = E[S] - \frac{1}{2} * \frac{u''(w)}{u'(w)} * \text{var}[S]$$

$$\rightarrow \delta(w) = - \frac{u''(w)}{2 * u'(w)}$$

Das heisst, der Sicherheitszuschlag verhält sich gemäss der *Pratt-Arrow'schen Risikoaversion* in Abhängigkeit vom Eigenkapital der Versicherung.

5.2. Top Down-Prämienbestimmung

Beim Top down wird das Problem der Prämienhöhe durch Betrachtungen von der Fragestellung des Gesamtrisikos der Versicherung bestimmt, das heisst aufgrund Argumenten allgemeineren (höheren) Niveaus gerechnet:

1. Aufgrund von Risikoanalysen und einer bestimmten Ruinbereitschaft Ψ_0 der Versicherung wird das Niveau des akzeptierten Gesamtschadens bestimmt.
2. Aus dem Gesamtschaden ergibt sich die Gesamtprämie, die zur Deckung des Gesamtschadens notwendig ist.
3. Aufgrund der Gesamtprämie können die einzelnen Police-Prämien berechnet werden.

Wie ergibt sich jedoch nun der Zusammenhang zwischen der Ruinbereitschaft einer Versicherung und der gesamtprämie, die eine Versicherung gedeckt haben sollte? Um diese Frage zu beantworten anbietet sich die *Cramér-Lundberg-Ungleichung*, die nach r aufgelöst wird:

$$\Psi = f(w) \leq e^{-rw}$$

$$\rightarrow r = \frac{-\ln \Psi_0}{w}$$

Wobei: Ψ := Ruinwahrscheinlichkeit, wird von Versicherung „festgelegt“ $\rightarrow \Psi_0$
 w := Kapital der Versicherung

Diese Ungleichung hat jedoch nur dann eine positive (also sinnvolle) Lösung, falls für r ebenfalls folgende Gleichung gilt:

$$E[e^{rS}] = e^{rp}$$

$$\rightarrow p = \frac{\ln E[e^{rS}]}{r}$$

Wir können diese Gleichung gemäss der *Kumulantenentwicklung* (eine Art Taylor-Reihe) umformen und erhalten neu:

$$p = E[S] + \frac{1}{2} r^2 \text{var}[S]$$

setzen wir r aus der Cramér-Lundberg-Gleichung in diese Gleichung ein, erhalten wir:

$$p = E[S] - \frac{1}{2} \frac{\ln \Psi_0}{w} \text{var}[S]$$

Daraus wird ersichtlich, dass für das Varianzprinzip gilt:

$$\delta(\Psi_0) = -\frac{\ln \Psi_0}{2w}$$

δ ist gross:

1. Für kleines Kapital w
2. Für $\Psi_0 \rightarrow 0$

6. Realität

In Realität läuft natürlich nicht alles so vernünftig und fair. Auf der einen Seite sind die Versicherungen nicht auf ein Nullnutzen-Geschäft aus, auf der andern Seite sind sie aber aus Kriterien der Konkurrenzfähigkeit auch oft dazu gezwungen, ihre Prämien unterhalb der sinnvollen technischen Prämie anzusetzen. Ein solcher Prozess konnte so aussehen:

- Gute Finanzielle Lage bei den Versicherungen.
 - ➔ Marktwirtschaftliche Konkurrenz führt zu Prämiendumping.
- Irgendwann tritt ein grösserer marktübergreifender (damit sind die Ereignisse nicht mehr unabhängig) Schaden ein.
 - ➔ Kleinere Versicherungen bewegen sich in Richtung Konkurs, grössere können den Schaden besser verkraften.
 - ➔ Grosse Versicherungen akquirieren kleinere.
 - ➔ Prämien gehen bei den zurückbleibenden Versicherungen wieder rauf, um den entstandenen finanziellen Schaden zu reparieren (Recovering Period).